

# Análisis matemático de la difusión de un rumor entre dos grupos de personas

*Raúl Isea*

Fundación Instituto de Estudios Avanzados  
Hoyo de la Puerta  
Baruta, República Bolivariana de Venezuela  
*risea@idea.gob.ve*

## I. INTRODUCCIÓN

Los seres humanos somos seres sociales caracterizados por que nos comunicamos y generamos un flujo continuo de información, bien sea en forma oral o escrita. De hecho, recibimos mucha información y con frecuencia no verificamos ni su origen ni su veracidad. Si tenemos presente que el Diccionario de la Real Academia Española define rumor como la “*Voz que corre entre el público*”, y también como el “*Ruido confuso de voces*”, entonces la carencia de veracidad de una determinada información es simplemente lo que conocemos como rumor.

La historia nos enseña que en los inicios de la civilización se difundían rumores, y podemos deducirlo al recordar que en la mitología griega existía una doncella con alas y trompetas llamada Feme u Osa, que transmitía oralmente los acontecimientos que ocurrían en la tierra, es decir, comunicaba la información. Podemos especular diciendo que esa información podía ser cierta o no, y que alimentaba (o no) los rumores en esa época. En la obra *La Eneida* de Virgilio, se describe a Feme, pero representada como la “Voz pública”, que es producto de la misma tierra por múltiples bocas y ojos que viajan a gran velocidad por todas partes.

Cuan cierta resulta ahora esa imagen de Virgilio por obra de las tecnologías de la información, gracias a las cuales se propaga la información a la velocidad de un clic, y también por el auge de las redes sociales como Twitter, Facebook y Blogs, entre otros, sin pasar por alto el volumen de datos que se transmiten a través de correos electrónicos y mensajería de texto, sin necesidad de la interacción *in situ* entre personas.

Esos diálogos se basan en el acto social donde se expresan nuestros puntos de vista de acuerdo al interés en transmitir la información, así como la necesidad de otros por escucharlos, bien sea resaltando un hecho curioso, un rasgo de admiración, o por el contrario, generando envidias, celos o hasta fomentar el caos. De allí que no sorprende el hecho de que muchas veces la comunicación depende de los intereses de las personas que la generan y la reciben.

Por esa razón, se ha realizado un esfuerzo para modelar matemáticamente los rumores como se aprecia en múltiples trabajos [véanse por ejemplo 1, 2 y los que en ellos se citan]. Las bases matemáticas para simular dicho proceso parte de la similitud que la mayoría de los autores observan al asociar un rumor con un brote epidémico, donde la difusión de un rumor, al igual que una epidemia, dependerá de las distintas interacciones entre una población, de modo que podemos inferir que los rumores son como brotes infecciosos de la mente que surgen sin previo aviso, y se contagian con 'un grado de verdad' que hace que las personas deseen creer en ellos.

El presente ensayo propone un modelo matemático que permite comprender la transmisión de un rumor entre dos grupos de personas, el cual permitiría, a futuro, modelar dos tendencias políticas cuando proponen resolver un problema, así como el manejo de una misma información entre dos medios de comunicación diferentes, etc. Para lograrlo, debemos comenzar explicando el modelo más sencillo para representar la difusión del rumor, y posteriormente compararlo con el modelo planteado por Daley-Kendall [3], para finalmente proponer uno nuevo que simule la difusión del rumor entre dos grupos diferentes de difusores, empleando las bases propuestas por el modelo Daley-Kendall.

## II. MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático más sencillo para simular el proceso de difusión de un rumor es el siguiente. Supongamos que tenemos una población formada por  $T$  personas. De todas ellas, cierta proporción, representada con la letra  $U$ , conoce el rumor en un tiempo  $t$ . Aquellos que lo escuchan lo difunden entre  $K$  personas; por ende, es fácil determinar el número de personas que se enteran del rumor en un momento dado por  $UK$ . El número de personas que desconocen el rumor es  $(T-U)/T$ , de modo que fácilmente podemos establecer la ecuación que permitirá precisar el número de personas que pueden llegar a escuchar el rumor en un momento dado:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{UK}{T}(T - U)$$

si observamos la expresión anterior, posee la misma forma que una ecuación del tipo logística, cuya solución es simplemente:

$$U(t) = \frac{U_0 T e^{tK}}{T + U_0 (e^{tK} - 1)} \quad (1)$$

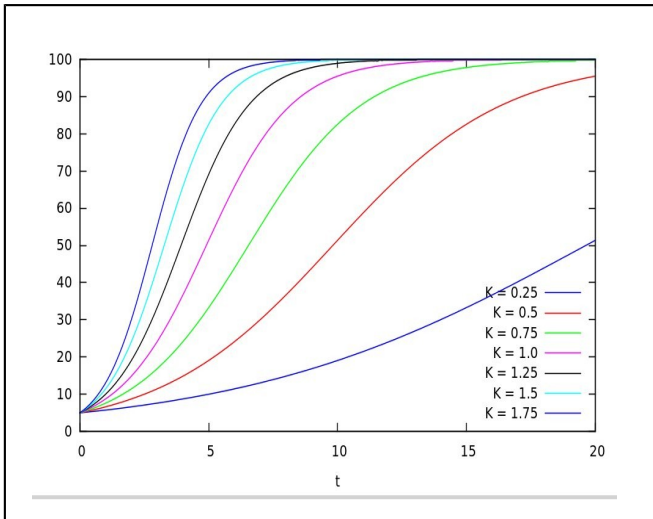


Fig. 1. Gráfica de individuos en función del tiempo, donde se aprecia el proceso de difusión de un rumor en una población constituida por 100 individuos de los cuales cinco comienzan a propagar un rumor en forma aleatoria. La simulación es hasta una escala de 20 días (t= 20), donde se va variando el valor de K de 0.25, 0.50, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5 y 1.75.

donde se definió  $U_0$  como el número inicial de personas que conocen el rumor al principio de su propagación (t= 0). En la Fig. 1 se muestra un ejemplo que ilustra cómo se modela el proceso de difusión en una población total de 100 individuos (T= 100), de los cuales cinco de ellos son el foco inicial (lo que denominamos comúnmente los chismosos) del rumor ( $U_0= 5$ , t= 0). A medida que vamos variando K, es decir, el número de personas potenciales que transmiten el rumor, se irá modificando la velocidad de la propagación del rumor entre esa población, donde se van cambiando los valores de K desde 0.25 hasta 1.75.

### III. MODELO PROPUESTO POR DALEY Y KENDALL

En 1965, Daley y Kendall [3] propusieron un modelo matemático para simular el proceso de difusión de un rumor, que es conocido en la literatura como el modelo DK. Ellos clasifican a la población en tres grupos diferentes:

- Los *ignorantes*, simbolizados por la letra U, que son aquellas personas que comienzan un rumor.

- Los *difusores*, representados con V, que son aquellos que transmiten el rumor, y
- Los *represores*, denotados como W, que son los que escuchan el rumor, pero deciden no difundirlo.

Este modelo asume que el rumor se propaga de acuerdo con la interacción entre los *ignorantes* y los *difusores* a una tasa dada por  $\beta/T$ . El grado de aceptación del rumor se representa con  $\mu$ . Cuando un *difusor* interactúa con un *represor*, el rumor deja de propagarse [3,4].

No sorprende el hecho de que el rumor debe perder su valor en el tiempo, y por ello, lo denotamos con una probabilidad definida como  $\gamma$ , lo que equivale a que el rumor deja de ser una novedad, bien sea porque ya todos lo conocen o porque carece del valor que motivó su difusión. De manera que las ecuaciones que describen el modelo mencionado estarán dadas por [3,4]:

$$\frac{dU}{dt} = \mu T - \frac{\beta UV}{T} - \mu U \quad (2)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\beta UV}{T} - \frac{\gamma V(V+W)}{T} - \mu V \quad (3)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\gamma V(V+W)}{T} - \mu W \quad (4)$$

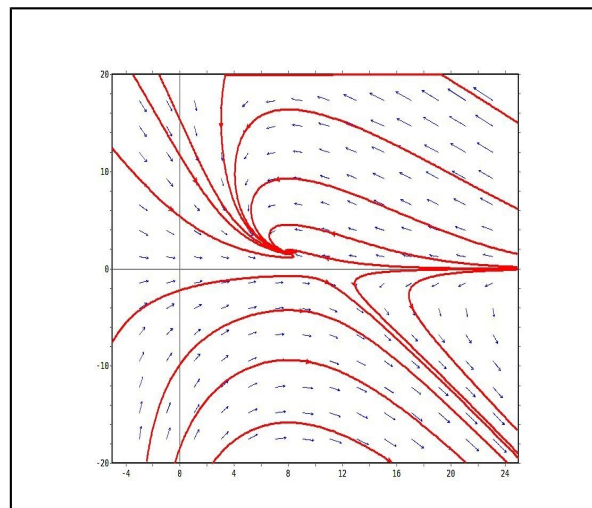


Fig. 2. Diagrama del campo vectorial obtenido gracias al lenguaje de programación Python empleando el módulo matplotlib. La gráfica está centrada en el punto  $U= 10$  y  $V= 0$ . Los parámetros seleccionados aleatoriamente son  $\beta= 1.5$ ,  $\mu= 1.0$ ,  $\gamma= 1.0$  y  $T= 10$ . Las líneas rojas muestran las distintas trayectorias dentro del campo vectorial, y se aprecia cómo convergen alrededor del punto  $U= 10$ ,  $V= 0$ , que es justo el primer punto de equilibrio.

El valor de  $R_0$  que va a representar el umbral de la población que justo comienza a difundir el rumor, se obtiene análogamente al procedimiento realizado a la hora de simular

brotos epidémicos [5], es decir, se determinan los puntos de equilibrio del sistema a partir de las ecuaciones (2-4). Posteriormente, se calcula el Jacobiano (J) de dicho modelo, es decir, calculamos las derivadas parciales de las ecuaciones diferenciales evaluadas en cada uno de los puntos críticos. La matriz resultante determina los autovalores, de modo que el valor de R0 será el más alto de todos. A modo de ejemplo, se mostrará el valor obtenido en uno de los puntos de equilibrio del sistema.

El Jacobiano del sistema de ecuaciones (2-4) está dado por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{-\beta V}{T} - \mu & \frac{-\beta U}{T} & 0 \\ \frac{\beta V}{T} & \frac{\beta U}{T} - \frac{\gamma V}{T} - \frac{\gamma(V+W)}{T} - \mu & \frac{-\gamma V}{T} \\ 0 & \frac{\gamma V}{T} + \frac{\gamma(V+W)}{T} & \frac{\gamma V}{T} - \mu \end{pmatrix} \quad (5)$$

Posteriormente, determinamos los valores de los puntos críticos a partir del sistema de ecuaciones (2-4) cuando lo igualamos a cero. En este caso, obtenemos dos puntos críticos que llamaremos P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>, dados por:

$$P_1: U' = T, V' = 0, W' = 0$$

$$P_2: U' = \frac{(\gamma + \mu)T}{\gamma + \beta}, V' = \frac{-\mu T(\mu - \beta)}{\beta(\gamma + \mu)}, W' = \frac{\gamma T(\mu - \beta)^2}{\beta(\gamma + \mu)(\gamma + \beta)}$$

Para sintetizar, solo consideraremos el primer punto, P<sub>1</sub>, de modo que sustituimos ese valor en la expresión obtenida en el Jacobiano (5), y nos da:

$$J_{P_1} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad (6)$$

la traza de J<sub>P1</sub> es β-3μ, y su determinante es igual a βμ<sup>2</sup>(1-μ). Finalmente, los autovalores de J<sub>P1</sub> son, respectivamente β-μ y -μ.

Para visualizar ese resultado, se muestra en la Fig. 2 el diagrama del campo vectorial empleando el lenguaje de programación Python aplicando la librería matplotlib. El diagrama es la representación bidimensional de los valores de las derivadas resultantes de las ecuaciones de dU/dt y dV/dt donde simplificamos la tercera ecuación diferencial, al considerar la relación W= T-U-V.

#### IV. SE PROPONE UN NUEVO MODELO

Nosotros proponemos un nuevo modelo para describir el proceso de difusión de un único rumor (U) entre dos grupos diferentes de difusores, es decir, considerando una subpoblación de difusores denominados V<sub>1</sub> y V<sub>2</sub>, en analogía con el modelo DK (Fig. 3). Suponemos además que cada uno de estos difusores posee distintas probabilidades que caracterizarán la velocidad con que se transmitirá el rumor, los

cuales definiremos a partir de los parámetros β<sub>1</sub> y β<sub>2</sub>. Los dos subgrupos de repesores dados por W<sub>1</sub> y W<sub>2</sub>, tendrán probabilidades diferentes según las cantidades γ<sub>1</sub> y γ<sub>2</sub>, respectivamente.

El modelo que planteamos en este trabajo estará expresado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dU}{dt} = \mu T - \frac{\beta_1 U V_1}{T} - \frac{\beta_2 U V_2}{T} - \mu U \quad (7)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\beta_1 U V_1}{T} - \frac{\gamma_1 V_1 (V_1 + W_1)}{T} - \mu V_1 \quad (8)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{\beta_2 U V_2}{T} - \frac{\gamma_2 V_2 (V_2 + W_2)}{T} - \mu V_2 \quad (9)$$

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{\gamma_1 V_1 (V_1 + W_1)}{T} - \mu W_1 \quad (10)$$

$$\frac{dW_2}{dt} = \frac{\gamma_2 V_2 (V_2 + W_2)}{T} - \mu W_2 \quad (11)$$

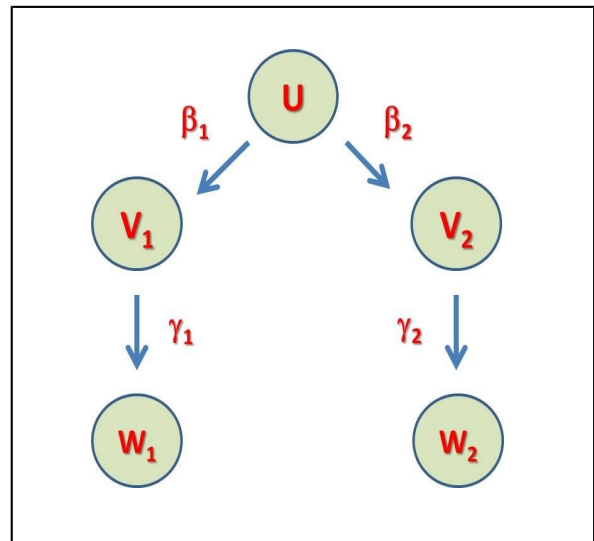


Fig. 3. Modelo propuesto del proceso de difusión de un rumor (U) entre dos grupos diferentes de difusores, cuyas probabilidades están descritas por (β<sub>1</sub>, γ<sub>1</sub>) y (β<sub>2</sub>, γ<sub>2</sub>), respectivamente.

La solución numérica del sistema de ecuaciones (7-11) se aprecia en la Fig. 4 donde se ha supuesto una población de 10 individuos (T= 10), de los cuales hemos decidido que solo uno de cada grupo de difusores es el que transmitirá el rumor inicial, es decir, V<sub>1</sub>(0)= 1, V<sub>2</sub>(0)= 1, y para mostrar cómo varía la velocidad de propagación del rumor entre dichos grupos,

donde el primer grupo  $(V_1, W_1)$  esparcirá más rápidamente el rumor que el segundo grupo  $(V_2, W_2)$ ; es decir, colocamos  $\beta_1=1.5$  y  $\beta_2=0.8$  para garantizar el último comentario referente a qué grupo difunde más rápidamente el rumor. En ambos hemos estimado la misma probabilidad de que las personas ignoren el rumor (es decir,  $\gamma_1= \gamma_2= 1.0$ ,  $\mu= 1.0$ ).

## V. LAS GUARIMBAS EN VENEZUELA. UN EJEMPLO ILUSTRATIVO.

A modo de ejemplo se considera la tendencia registrada tras la búsqueda en internet de los términos “guarimba en Venezuela”, para poder explicar ese comportamiento en función de la teoría del rumor expuesta en el presente ensayo. Advertimos de que solo nos remitimos a los resultados, sin hacer ninguna referencia que explique esa tendencia.

El término “guarimba” se empleó en las redes sociales en Venezuela así como en los medios de comunicación para describir las acciones de protesta no violentas, caracterizadas principalmente por la presencia de barricadas en calles y avenidas, que impedían el libre tránsito en ciertos lugares de las ciudades.

La herramienta que identifica las tendencias en internet es *Google Tendencias* (traducción de *Google Trends*), disponible en <https://www.google.es/trends/>. Los resultados obtenidos se traducen según una escala de 0 hasta 100, y las búsquedas se pueden restringir tanto por zona geográfica como por intervalo de tiempo. Desconocemos el criterio que empleó Google para cuantificar esa escala.

Al introducir la expresión “guarimba en Venezuela” en la página web citada, los resultados obtenidos comienzan en febrero de 2014 y decaen con el tiempo, como se aprecia en la figura 5 con círculos verdes.

El modelo que se utilizará para intentar explicar ese comportamiento será aquel donde se propaga un rumor (simbolizado con  $U$ ) entre dos grupos diferentes de la población (representados por  $V_1$  y  $V_2$ ), descritos por las ecuaciones (7-11). El primer grupo que difunde el rumor ( $V_1$ ) corresponde claramente con los valores obtenidos de la consulta hecha en *Google Tendencias*. De modo que nuestro modelo debe reproducir la tendencia a partir de la resolución del sistema de ecuaciones.

Esa resolución fue posible gracias a la metodología Shooting descrita en Python [véanse detalles en 6], la cual está representada con una línea de color azul y círculos rojos en la figura 5. En ella se observa la excelente concordancia de los resultados.

## VI. CONCLUSIONES

Las tecnologías de la información están permitiendo difundir los rumores a gran velocidad independientemente del lugar geográfico donde se estén generando. Por ello, es necesario desarrollar modelos matemáticos que permitan caracterizar, analizar y predecir la difusión de los rumores en

función del tiempo. En ese sentido, se plantea un modelo matemático en el que se representa el proceso de difusión entre dos grupos de la población a partir de un rumor inicial. A modo de ejemplo, se mostró el comportamiento derivado de la tendencia “guarimba en Venezuela” localizada en *Google Tendencias*. En la figura 5 se aprecia que es una buena aproximación que permite explicar las tendencias encontradas en internet, pero debe complementarse y examinarse con mayor detalle, lo cual se abordará en futuros trabajos. Una vez desarrollada la metodología, será posible esclarecer, por ejemplo, su efecto en campañas presidenciales dependiendo de una noticia o un comentario, o en las tendencias en el mercado bursátil con base en supuestos del mercado, o cómo los periódicos pueden manejar una misma información.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. Piqueira. Rumor propagation model: An equilibrium study. *Mathematical Problems in Engineering* 2010. 2010: ID 631357.
- [2] L. Huo , P. Huang, C. Guo. Analyzing the Dynamics of a Rumor Transmission Model with Incubation. *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2012. 2012: ID 328151.
- [3] D. J. Daley, D. G. Kendall. Stochastic rumors. *J. Inst. Math. Appl.*, 1965, 142: 42-55.
- [4] N. Fedewa, E. Krause, A. Sisson, J. Angelos. Spread of a rumor. *SIAM Undergraduate Research Online (SIURO)* 2013 [acceso 1 de junio de 2014]. Disponible en <http://goo.gl/ypAe9B>
- [5] K. Dietz. Epidemics and rumors: A survey. *J. R. Stat. Soc. A* 1967, 130: 505-528.
- [6] J. Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with Python*. 2nd ed. Cambridge University Press; New York, NY, USA: 2010.

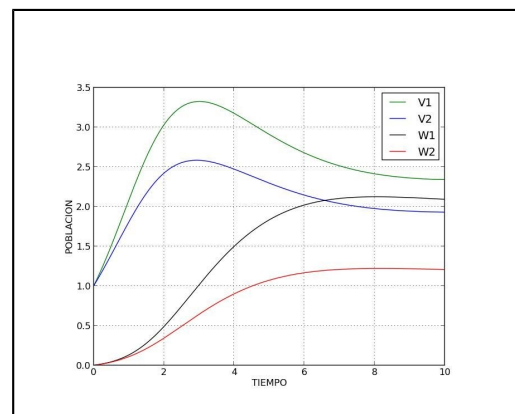


Fig. 4. Solución numérica del modelo general propuesto para el proceso de difusión de un rumor por dos grupos de difusores en una población de 10 personas (véase el texto para mayores detalles).

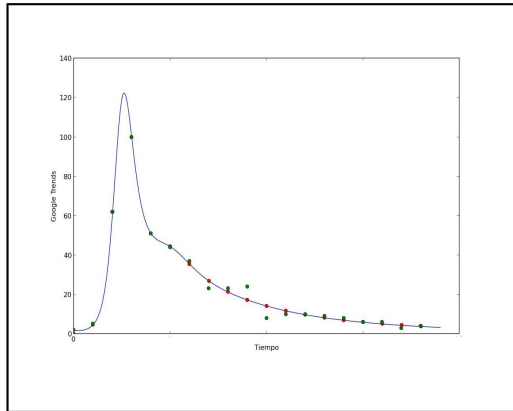


Fig. 5. Resultado de la búsqueda de los términos “guarimba en Venezuela” en *Google Tendencias* representado con círculos verdes. Con línea azul y círculos rojos se representa el resultado obtenido tras la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales descrito por las ecuaciones (7-11) empleando la metodología de Shooting [6], en el período comprendido entre febrero y mayo de 2014. Se eliminaron las etiquetas del eje x para mayor claridad en el gráfico. Los valores obtenidos son  $T = 2116$ , mientras que los valores  $(\beta_1, \gamma_1)$  y  $(\beta_2, \gamma_2)$  son  $(5.06, 2.96)$  y  $(28.03, -0.83)$ , respectivamente.