

Agujeros de gusano en un espacio no-conmutativo del tipo Morris-Thorne considerando una teoría de gravedad modificada $f(R)$

Raúl Isea

Instituto de Estudios Avanzados – IDEA
Hoyo de la Puerta, Baruta, Venezuela
risea@idea.gob.ve

Fecha de recepción: 09/03/2016

Fecha de aceptación: 03/10/2016

Pág: 2 – 8

Resumen

Se determina la función de forma de un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne en un espacio no-conmutativo, considerando una teoría de gravedad modificada $f(R)$. Finalmente, se verifica que viola la condición de energía que es un requisito para mantener abierto un agujero de gusano de acuerdo a la literatura científica.

Palabras Clave: agujero de gusano, $f(R)$, no-conmutativo

Introducción

Morris y Thorne [1] han propuesto una serie de condiciones que pueden permitir utilizar a los agujeros de gusano como una estructura del tipo túnel que conecta dos regiones del universo, permitiendo viajar grandes distancias del espacio en el menor tiempo posible. Asimismo, se ha planteado la posibilidad de emplearlos como máquinas del tiempo con la condición que no se cambien los eventos del futuro [2].

Snyder [3], [4] empleó por primera vez una discretización del espacio tiempo basada en una geometría no-conmutativa caracterizada por la siguiente relación $[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = i\theta_{ij}$, donde θ_{ij} es una matriz antisimétrica con dimensiones de longitud [mayores detalles en [5], [6], y retomadas posteriormente por Connes [7] así como Fujikawa [8], por citar algunos ejemplos.

Dicha geometría ha explicado por ejemplo, modelos que explican la aceleración del universo [9], la creación de la materia en el universo [10], descripción de agujeros negros [11] así como en agujeros blancos [12], entre otros.

Con el uso de dicha geometría, Nicolini y colaboradores [14] seleccionan un ansatz que corresponde a una métrica simétrica y estática expresada por

$$\rho(r) = \frac{m}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}} \quad (1)$$

Aquí m , es la masa contenida en la región comprendida $\sqrt{\theta}$. Gracias a esta relación, y teniendo presente el elemento de línea estática y simétrica en coordenadas esféricas de acuerdo a Morris y Thorne [1]:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (2)$$

donde $\phi(r)$ y $b(r)$ son la función del corrimiento al rojo gravitacional y la función de forma, respectivamente. Los tres valores posible de k corresponden a $0, -1$ y 1 para un espacio plano o curvatura nula, espacio abierto con curvatura negativa y cerrado con curvatura positiva, respectivamente. La ecuación de campo de Einstein viene dada por $G_m = 8\pi T_{uv}$, donde T_{uv} es el tensor de energía momento, las ecuaciones de Einstein vienen expresadas como (considerando un sistema de unidades $c = 1$ así como $8\pi G = 1$):

$$G_{tt} : \frac{3kr^2 + b'}{r^2} = \rho \quad (3)$$

$$G_{rr} : \frac{2r(r - kr^3 - b)\phi' - b - kr^3}{r^3} = p_r \quad (4)$$

$$G_{\theta\theta} : \frac{2r^2(r - kr^3 - b)(\phi'' + \phi'^2) + \phi'r[(2 - b')r - b - 4kr^3] - 2kr^3 - b'r + b}{2r^3} = p_t \quad (5)$$

donde la $'$ denota la derivada con respecto a r . Teniendo presente que p_r corresponde a la presión radial mientras que p_t es la presión lateral medida justo perpendicularmente a la dirección radial, dicho conjunto se considera como la solución de la gravedad de Einstein. A continuación se determina la función de forma $b(r)$ así como la teoría $f(R)$.

Función de forma $b(r)$

Si sustituimos la expresión de la densidad de energía dada por (1) en la ecuación (3), encontramos que la función de forma viene dada por

$$b'(r) = \frac{mr^2 e^{-\frac{r^2}{4\theta}}}{8(\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} - 3kr^2$$

Al integrar esta última ecuación obtenemos la expresión de la función de forma:

$$b(r) = \frac{m}{4(\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} (\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}} \text{erf}(\frac{r}{2\sqrt{\theta}}) - \theta r e^{-\frac{r^2}{4\theta}}) - kr^3 + c \quad (6)$$

donde C es una constante de integración, y erf es la función de error definida como

$$\text{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

A continuación adoptamos un modelo donde se emplea la teoría de gravedad modificada $f(R)$, que no es más que considerar términos adicionales a las ecuaciones de campo de Einstein que son resultado de una generalización de la acción de Einstein-Hilbert con términos adicionales del escalar de curvatura descrito por R (ver por ejemplo [14] y [15]).

Presión radial p_r

La presión radial p_r está dada por la ecuación (4), y si consideramos un valor constante del corrimiento al rojo, $\phi = \phi_0$, obtenemos:

$$p_r = \frac{-b(r) - kr^3}{r^3} \quad (7)$$

De modo que al sustituir la expresión de la función de forma deducida en la ecuación (6) y suponer una curvatura plana ($k = 0$), obtenemos:

$$p_r = -\frac{m}{4r^3(\pi\theta)^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}erf(\frac{r}{2\sqrt{\theta}}) - \theta re^{-\frac{r^2}{4\theta}}) \quad (8)$$

Esta última ecuación se empleará más adelante cuando se determine la expresión de energía $\rho + p_r < 0$.

Teoría $f(R)$

Las ecuaciones de campo en teorías $f(R)$ fueron introducidas por Weyl y Eddington, quienes publicaron una teoría de gravedad basada en lagrangianos cuadráticos, es decir, proporcionales al cuadrado del escalar de Ricci [14],[15]. Por simplicidad consideremos k igual a cero, de modo que las ecuaciones vienen dadas por:

$$G_{tt} : \frac{Fb'}{r^2} = \rho \quad (9)$$

$$G_{rr} : -F''(1 - \frac{b}{r}) + \frac{F'}{2r^2}(b'r - b) - \frac{bF}{r^3} = p_r \quad (10)$$

$$G_{\theta\theta} : \frac{F'}{r}(1 - \frac{b}{r}) + \frac{F}{2r^3}(b - b'r) = p_t \quad (11)$$

La función de forma dependerá de la modificación de la expresión de la gravedad. Si consideramos el caso más sencillo, su dependencia será una función de la ley de potencia de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F(R) = aR^n \quad (12)$$

donde R es el escalar de Ricci, y $\frac{Fdf}{dR}$, de modo que tenemos:

$$R(r) = \frac{2b'}{r^2} \quad (13)$$

por lo que al sustituir (13) en (12), se obtiene

$$F(R) = a\left(\frac{2b'}{r^2}\right)^n \quad (14)$$

A partir de estas ecuaciones es posible derivar la expresión general de la función de forma del agujero de gusano al despejar la expresión de $b'(r)$ según (9), es decir:

$$b'(r)^{n+1} = \frac{mr^{2(1+n)}}{a(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}2^n} e^{\frac{-r^2}{4\theta}} \quad (15)$$

Esta última ecuación es una expresión general que nos permite obtener la función de forma. Para realizar la integración, se va a considerar cinco valores diferentes de n . A continuación se indica la solución que corresponde a para $n = 1$.

Para $n = 1$, la función de forma $b(r)$ se obtiene a partir de la ecuación (13) dada por:

$$b'(r) = \left(\frac{\sqrt{\frac{m}{a\theta^{\frac{3}{2}}}}}{4\pi^{\frac{3}{4}}}\right)r^2 e^{\frac{-r^2}{8\theta}}$$

El término dentro del paréntesis es un valor constante y lo podemos definir como m_0^1 , donde el superíndice nos indica el valor de n del cual fue derivado, en este caso $n = 1$, así que lo podemos reescribir como $b'(r) = m_0^1 r^2 e^{\frac{-r^2}{8\theta}}$. Integrando esta ecuación tras reagrupar términos, alcanzamos la siguiente ecuación:

$$b(r)_{n=1} = m_0^1 \left[2^{\frac{5}{2}} \sqrt{\pi} \theta^{\frac{3}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\theta}}\right) - 4\theta r e^{\frac{-r^2}{8\theta}} \right] \quad (16)$$

En la Tabla 1 se muestra los resultados del procedimiento anterior para $n = 2$ hasta $n = 5$; mientras que la figura 1 se muestran las funciones de forma $b(r)$ para $n = 1$ (en azul), $n = 2$ (en rojo), $n = 3$ (en verde), $n = 4$ (en fucsia) y $n = 5$ (en negro), considerando $\theta = 0.02$, $a = 1$ y $m = 20$. Es interesante destacar que la función de forma para $n = 2$ hasta 5 presentan el mismo comportamiento, con excepción de la solución obtenida con $n = 1$.

Tabla 1: Resultados de la función de forma factor $b(r)$ obtenidos para n igual 2 hasta 5 (detalles en el texto), donde se definen las constantes m_0^n para cada valor de n .

n	$b(r)$	m_0^n
2	$m_0^2[23^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}\text{erf}(\frac{r}{2\sqrt{3}\sqrt{\theta}}) - 6\theta re^{-\frac{r^2}{12\theta}}]$	$\frac{\sqrt[3]{\frac{m}{4a}}}{2\sqrt{\pi\theta}}$
3	$m_0^3[16\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}\text{erf}(\frac{r}{4\sqrt{\theta}}) - 8\theta re^{-\frac{r^2}{16\theta}}]$	$\frac{\sqrt[4]{\frac{m}{2\sqrt{a\theta^{\frac{3}{2}}}}}}{2^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{8}}}$
4	$m_0^4[25^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}\text{erf}(\frac{r}{2\sqrt{5}\theta}) - 10\theta re^{-\frac{r^2}{20\theta}}]$	$\frac{\sqrt[5]{\frac{m}{4a}}}{2(\pi\theta)^{\frac{3}{10}}}$
5	$m_0^5[26^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}\text{erf}(\frac{r}{2\sqrt{6}\theta}) - 12\theta re^{-\frac{r^2}{24\theta}}]$	$\frac{\sqrt[6]{\frac{m}{\theta^{\frac{2}{3}}a}}}{\sqrt[3]{16(\pi)^{\frac{1}{4}}}}$

Finalmente, recordemos que Morris y Thorne [1] señalaron que para mantener abierto un agujero de gusano se cumple la condición $\rho + p_r < 0$. De manera que para $n = 1$, y considerando las ecuaciones (1) y (8) obtenemos:

$$\rho + p_{r|_{n=1}} = \frac{m}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4\theta}} - \frac{m}{4r^3(\pi\theta)^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}\text{erf}(\frac{r}{2\sqrt{\theta}}) - \theta re^{-\frac{r^2}{4\theta}}) \quad (17)$$

Por simplicidad, se muestra en la figura 2 los resultados de evaluar dichas ecuaciones cuando consideramos $m = 20$, $a = 1$, y $\theta = 0.001$ para una de las funciones de forma $b(r)$ en cada valor de n que están indicados en la Tabla 1 . En color azul, rojo, verde, fucsia y negro se representan los resultados de evaluar las expresiones de $\rho + p_r$ correspondientes a $n = 1, 2, 3, 4$ y 5, respectivamente. En todos esos casos se observa que $\rho + p_r$ es negativa, condición ya mencionada en la literatura científica.

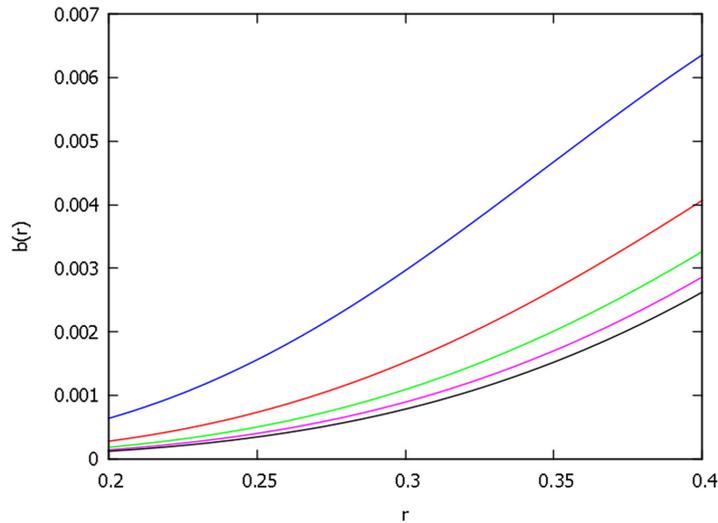


Figura 1: Función de forma del agujero de gusano (ver texto para detalles).

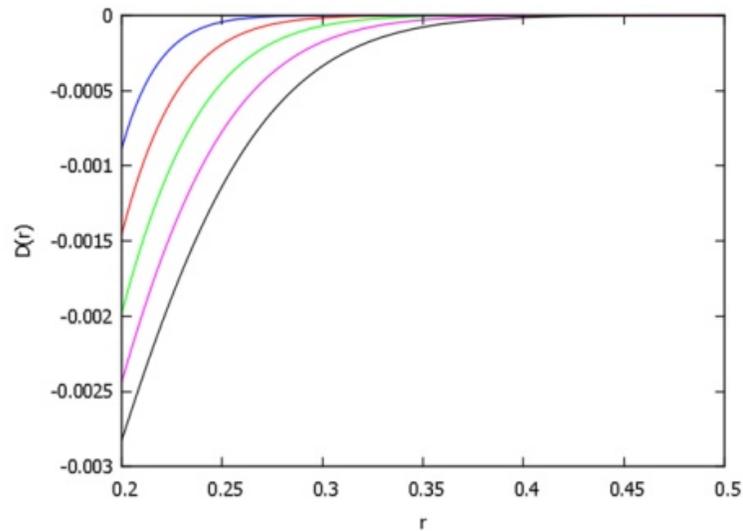


Figura 2: Gráfica de $D \equiv \rho + p_r$ en función de r (ver texto para detalles).

Conclusiones

Se determinó la función de forma de un agujero de gusano del tipo Morris-Thorne en un espacio no-conmutativo, donde se ha considerado una teoría de campo modificado gravedad $f(R)$. Con dicha geometría, igualmente se verifica que para mantener abierto dicho agujero (ver figura 2), es necesario violar la condición de energía $\rho + p_r < 0$ como se planteó en el trabajo publicado por Morris-Thorne.

Bibliografía

- [1] M. S. Morris, and K.S. Thorne. (1988). *Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. Am. J. Phys, Vol. 56, pp. 395-412, 1988.
- [2] R. Isea. (2016) *La física de los viajes en el tiempo a través de un agujero de gusano*. Aceptado para ser publicado en la Revista de la Escuela de Física. Vol. IV, 2016.
- [3] H. S. Snyder. (1947) *Quantized Space-Time*. Phys. Rev. vol. 71, pp. 38-41, 1947.
- [4] H. S. Snyder. 1947 *The electromagnetic field in quantized space-time*. Phys. Rev. vol. 72, pp. 68-71, 1947.
- [5] C. A. Vaquera, and J.L. Lucio. (2005) *Non-Commutative Mechanics as a modification of space-time*. ArXiv: math-ph/0512064v1, 2005.
- [6] L. Mezincescu. (2000) *Star operation in Quantum Mechanics*. ArXiv:hep-th/0007046v2, 2000.

- [7] A. Connes. (1997) *Noncommutative differential geometry and the structure of spacetime*. In Cyclic Cohomology and Noncommutative Geometry, J. J. R. Cuntz and M. Khalkali, eds., Field Institute Communications, Amer, Math, Soc, Providencem RI, pp. 14-42, 1997.
- [8] K. Fujikawa. (2004) *Quantization of Space-time Noncommutative Theory*. ArXiv:hep-th/0410146, 2004.
- [9] A. R. El-Nabulsi. (2010) *Noncommutative accelerated multidimensional universe dominated by quintessence*. Astrophysics and Space Science, vol. 326, pp 163-167, 2010.
- [10] T. Miller, and M. Heller. (2016) *Creation of Matter in a Noncommutative Universe*. ArXiv:1601.06932, 2016.
- [11] Nicolini, Piero. (2009) *Noncommutative Black Holes, The Final Appeal To Quantum Gravity: A Review*. Int.J.Mod.Phys. vol. A24, pp. 1229-1308, 2009.
- [12] F. Rahaman, S. Karmakar, I. Karar, S. Ray. (2015) *Wormhole inspired by non-commutative geometry*. Physics Letters B. Vol. 746, pp. 73–78, 2015.
- [13] P. Nicolini, A. Smailagic, E. Spallucc. (2006) *Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole*. Phys Lett. Vol. B632, pp. 547-551, 2006.
- [14] S. Capozziello, M. Francaviglia.(2008) *Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications*. Gen Rel Grav. Vol. 40, pp. 357-420, 2008.
- [15] A. De Felice, and S. Tsujikawa, “F(R) Theories. (2010) *F(R) Theories* Living Rev Relativity. Vol. 13(3), pp. 1-161, 2010.