Centro Nacional de Desarrollo e Investigación en Tecnologías Libres (CENDITEL)
Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC), Mérida – Venezuela
ISSN: 2244-7423

Derivación de la función del corrimiento hacia el rojo en agujeros de gusano del tipo Morris-Thorne estabilizados con energía fantasma

Raúl Isea
IDEA
Hoyo de la Puerta, Baruta, Venezuela
risea@idea.gob.ve

Fecha de recepción: 05/03/2016
Fecha de aceptación: 24/04/2017
Pág: 111 – 120

Resumen

Se postula una nueva ecuación de la función del corrimiento hacia el rojo para atravesar un agujero de gusano con simetría esférica del tipo Morris-Thorne estabilizado con energía fantasma, caracterizas por incumplir la condición de energía débil, como se demuestra con tres ejemplos. Por último, se determina el valor de w de la ecuación de estado a partir de una nueva función del corrimiento hacia el rojo tal que se cumpla la condición $w = -1$.

Palabras clave: agujero de gusano, Morris-Thorne, energía fantasma.

1 Introducción

Morris La posibilidad de emplear agujeros de gusano para viajes interestelares ha sido posible gracias a las ecuaciones presentadas por Morris y Thorne [1, 2], las cuales expresan cómo se conectan dos regiones diferentes de nuestro universo o cómo atravesar distintos universos a través de un agujero de gusano.

Hasta la fecha se han publicado numerosos trabajos referidos a la expansión acelerada de nuestro universo [véase por ejemplo [3, 4, 5] y las referencias ahí citadas], causada por la presencia de materia oscura (*dark matter*), lo cual implica que $\ddot{a} = 0$ en la ecuación de Friedmann, es decir:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}a(\rho + 3p) > 0 \tag{1}$$

Por otra parte, es conocido que la ecuación de estado viene dada por la relación $p = w\rho$ donde p y ρ son la presión y la densidad de energía, respectivamente, con un rango posible de valores de w que satisfagan la ecuación de Friedmann. En el caso de que w esté comprendida entre -1 y $-1/3$, se denomina el modelo de quintaesencia (del inglés *Quintessence*), como lo definieron

Caldwell, Dave y Steinhardt en 1998 [6]. En el caso que tenemos: $w = -1$, corresponde a un fluido de densidad de energía constante asociada con la constante cosmológica [7]. Finalmente, cuando $w < -1$ se denomina fantasma (*phantom energy*) que es justamente la condición que se analizará en este trabajo.

2 Energía Fantasma

La característica fundamental de la energía fantasma es que la densidad de energía aumenta a medida que el universo se expande a un ritmo más acelerado del que ocurría con una constante cosmológica [8].

El satélite WMAP ha confirmado que aproximadamente el setenta por ciento de la energía de nuestro universo es del tipo oscura, y un estudio publicado por Komatsu y colaboradores llegaron a establecer que el valor de w es cercano a -1, para ser más exacto, $w = -1.10 \pm 0.14$ de acuerdo a WMAP+BAO+H_o (detalles de la nomenclatura y cálculo en [9]), y este valor negativo ha permitido conceptualizar la existencia de los agujeros de gusano. Sin embargo, este tipo de energía trae como consecuencia que en un determinado momento del tiempo ocurrirá una catástrofe conocida como *Big Rip* (traducida como el *Gran Desgarro*). Al respecto, Gonzalez-Diaz indicó que los agujeros de gusano de tamaño de Planck pueden aumentar de tamaño rápidamente hasta llegar a sobrepasar el tamaño del universo, pero “explotan” justo antes de que ocurra el *Big Rip*, evitando así esa catástrofe [10].

En la próxima sección se comenzará a derivar una nueva ecuación de la función del corrimiento hacia el rojo para atravesar un agujero de gusano según el modelo presentado por Morris-Thorne [1], que admite los viajes intergalácticos [detalles en la referencia [2]], de acuerdo al procedimiento descrito por Garattini y Lobo [12]. Posteriormente se derivan dos funciones del corrimiento al rojo de acuerdo al procedimiento anterior, hasta que finalmente se plantea una nueva función que satisface las condiciones del viaje intergaláctico.

3 Derivación de la función del corrimiento al rojo

El punto de partida de nuestro análisis es considerar un elemento de línea estático y simétrico en coordenadas esféricas dado por [1]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) \tag{2}$$

donde $\Phi(r)$ determinará la función del corrimiento hacia el rojo gravitacional, también conocido por su nombre en inglés *redshift*, mientras que $e^{(r)}$ está dado por

$$e^{(r)} = \frac{1}{1 - \dfrac{b(r)}{r}} \tag{3}$$

donde $b(r)$ es la función de forma que fue descrita en [1]. De hecho, si el radio de la garganta del agujero lo definimos como r_o, entonces se debe cumplir una serie de requisitos por los cuales

ISSN: 2244-7423

sea del tipo atravesable, los cuales son $b(r_o) = r_o$. Asimismo, para garantizar la formación del agujero de gusano se debe mantener la condición $b^{'}(r_o) < 1$ y $b(r) < r$, donde la prima representa la derivada con respecto a r. Finalmente, y como se describe en [1], debe tenerse presente que $\frac{b - b^{'}r}{2b^2} > 0$, que son justamente las condiciones para que exista un agujero de gusano y pueda emplearse para viajar a través de él por su garganta, manteniendo la condición de energía débil, es decir, $p + \rho < 0$ [11].

La solución de la ecuación de campo de Einstein es

$$G_{uv} = 8\pi T_{uv} \tag{4}$$

donde se ha considerado el sistema de unidades $G = c = 1$.

Por la literatura sabemos que la expresión del tensor energía impulso T_{uv} está dado por $T_{uv} = (p + \rho)u_u u_v - pg_{uv}$, donde se debe cumplir la condición $u_u u_v = -1$. Por lo que las ecuaciones de campo de Einstein se obtienen de la expresión (2) considerando la ecuación (4):

$$G_{tt} : \frac{b^{'}}{r^2} = 8\pi\rho \tag{5}$$

$$G_{rr} : \frac{2r(r-b)\Phi^{'} - b}{r^3} = 8\pi p_r \tag{6}$$

$$G_{\theta\theta} : \frac{2r^2(r-b)(\Phi^{''} + \Phi^{'2}) + \Phi^{'}r[(2-b^{'})r - b] - b^{'}r + b}{2r^3} = 8\pi p_t \tag{7}$$

teniendo presente que $p_t(r)$ es la presión medida en las direcciones laterales (ortogonal a la dirección radial). De las ecuaciones (5) y (6) fácilmente se deduce

$$b^{'} = 8\pi\rho r^2 \tag{8}$$

$$\Phi^{'} = \frac{8\pi p_r r^3 + b}{2r(r-b)} \tag{9}$$

Al integrar la ecuación (8) obtenemos

$b(r) = b(r_0) + \int_{r_0}^{r} 8\pi\rho(r)r^2 dr$

Si evaluamos la ecuación anterior en $r = r_0$, es sencillo comprender que se puede definir $b(r) \equiv 2m(r)$, ya que

$m(r) = \frac{r_0}{2} + \int_{r_0}^{r} 4\pi\rho(r)r^2 dr$

lo que permite asociar a $m(r)$ como una distribución de masa del agujero de gusano ya que el segundo término es claramente la ecuación de una masa efectiva en el interior de una esfera de radio r, y justo en el límite cuando $r \to \infty$ se obtendrá la masa del agujero de gusano.

En paralelo, es posible derivar una expresión que relaciona la presión radial con la lateral partiendo de la ecuación (7), y eliminando los términos de b' y Φ'', hasta poder alcanzar

$$p_r' = \frac{2}{r}(p_t - p_r) - (\rho + \rho_r)\Phi' \tag{10}$$

De la ecuación de estado se conoce que $p_r = wp$ de modo que al ser $w < 1$, la (9) se puede reescribir como

$$\Phi' = \frac{w(r) r b'(r) + b(r)}{2r[r - b(r)]} \tag{11}$$

gracias a la relación (8) que vincula la densidad radial con b'.

Esta última ecuación permite derivar la expresión del corrimiento hacia el rojo integrándola con el parámetro radial. Para ello, se va a suponer la siguiente expresión de $w(r)$ la cual debe cumplir la condición de energía fantasma, es decir, $w(r_o) \leftarrow -1$ y que además es $-1 < w(r)$, por lo que se puede suponer una función [9]:

$$w(r) = -\alpha^2 + \beta^2 \left(1 - \frac{r_o}{r}\right) \tag{12}$$

donde α y β son constantes.

Para poder integrar la ecuación (11) es necesario también suponer una expresión de $b(r)$ y para ello, se van a considerar tres funciones diferentes las cuales se analizan a continuación, donde el Primer caso solo se está reproduciendo el resultado publicado en la literatura científica y permitirnos nuestra metodología. Los dos casos restantes se generalizan dichos resultados, hasta que finalmente se plantea una nueva función hacia el rojo, objetivo final del trabajo.

Primer caso: $b(r) = r_o + \gamma^2 r_o \left(1 - \frac{r_o}{r}\right)$

Consideremos la función de forma introducida por Garattini y Lobo [12] permitiéndole derivar una función del corrimiento hacia el rojo, y de esa manera, se verifica el procedimiento descrito en el presente trabajo. Ellos plantean una función de forma dada por la siguiente ecuación:

$$b(r) = r_o + \gamma^2 r_o \left(1 - \frac{r_o}{r}\right) \tag{13}$$

Dicha ecuación, como se indicó anteriormente, debe cumplir las condiciones anteriormente señaladas, es decir, $b(r) < r$, así como $b(r_o) = r_o$. Por otro lado, debe mantenerse que $b'(r_o) < 1$ de modo que al derivar la expresión $b(r)$ obtenemos

ISSN: 2244-7423

$$b'(r) = \frac{\gamma^2 r_0^2}{r^2} < 1$$

lo cual condiciona que la constante γ debe estar en el rango de valores $0 < \gamma^2 < 1$. Finalmente, se debe cumplir que $\dfrac{b - b'r}{2b^2} > 0$, es decir:

$$\frac{b - b'r}{2b^2} = \frac{r_o + r_o\left(1 - \frac{r_o}{r}\right)\gamma^2 - \frac{r_o^2\gamma^2}{r}}{2\left[r_o + r_o\left(1 - \frac{r_o}{r}\right)\gamma^2\right]^2}$$

efectivamente es mayor que cero si colocamos $r = r_o$ para su fácil identificación.

Al sustituir la expresión de $b(r)$ dado por la ecuación (13) así como $w(r)$ de acuerdo a (12), en la fórmula (11) correspondiente al corrimiento hacia el rojo, obtenemos

$$\Phi' = \frac{wrb' + b}{2r[r-b]} = \frac{r^2 r_o(1+\gamma^2) - \beta^2 r^2 r_0^3 - r r_0^2 \gamma^2 (1 + \alpha^2 - \beta^2)}{2r^2[\gamma^2 r_o(r_o - r) + r(r - r_o)]}$$

Al integrar la ecuación anterior, nos da

$$\begin{aligned}\Phi(r) = C + \frac{r_o\beta^2}{2r} + \frac{\ln(r - r_o)(\alpha^2\gamma^2 - 1)}{2(\gamma^2 - 1)} - \frac{\ln(r)[\gamma^2(1+\alpha^2) + \beta^2]}{2\gamma^2} + \\ + \frac{\ln(r - r_o\gamma^2)[\gamma^4 + (\beta^2 - \alpha^2)\gamma^2 - \beta^2]}{2\gamma^2(\gamma^2 - 1)}\end{aligned} \tag{14}$$

A pesar de haber realizado las consideraciones para que estas ecuaciones permitan que se pueda viajar a través del agujero de gusano, el tercer término de la ecuación (14) presenta un horizonte, por lo que fácilmente se puede evitar si se considera a $\alpha^2 = 1/\gamma^2$, y por carecer de alguna evidencia experimental, solo es posible suponer $C = 0$; por lo que la ecuación (14) será entonces

$$\Phi(r) = \frac{r_o\beta^2}{2r} + \frac{(1 + \gamma^2 + \beta^2)}{2\gamma^2}\ln\left(\frac{r - r_o\gamma^2}{r}\right) \tag{15}$$

El próximo paso es verificar que está última ecuación realmente viole la condición de energía débil indicada en la sección anterior, *i.e.*, $p + \rho < 0$, es decir:

$$p + \rho = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{b'r + 2r(r-b)\Phi' - b}{r^3}\right) = \frac{\gamma^2 r_o^2(1+w)}{8\pi r^4}$$

y a raíz que w es menor o igual que -1, se verifica que viola la condición de energía antes indicada.

Segundo caso: $b(r) = \sqrt{rr_0}$

Siguiendo el procedimiento anterior, consideremos ahora una función que fue postulada por Lemos y colaboradores [13] dada por $b(r) = \sqrt{rr_0}$, por lo que,

$$b'(r) = \frac{r_o}{2\sqrt{rr_0}}$$

Verificamos que $b'(r_o) = \frac{1}{2} < 1$, así como,

$$\frac{b - b'r}{2b^2} = \frac{1}{4\sqrt{rr_0}} > 0$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (11), obtenemos que

$$\Phi'(r) = \frac{-\beta^2 r_o^2 + rr_o(\alpha^2 - \beta^2 - 2)}{4r^2(\sqrt{rr_o} - r_o)}$$

Al integrar, tenemos

$$\Phi(r) = C_1 + \left(\frac{\alpha^2 - 2}{4}\right)\ln(rr_o) - \left(\frac{\alpha^2 - 2}{2}\right)\ln(\sqrt{rr_o} - r_o) - \frac{\beta^2 r_o(2\sqrt{rr_o}) + r_o}{4rr_o}$$

al igual anterior, se presenta un horizonte y por ende, se debe imponer la condición $\alpha = \sqrt{2}$. Asimismo, anulemos la constante de integración por carecer de evidencia experimental, de modo que la ecuación anterior será igual a,

$$\Phi(r) = \frac{-\beta^2(r_o + 2\sqrt{rr_o})}{4r}$$

Solo resta verificar que se incumple la condición de energía débil al obtener una expresión negativa, dada por,

$$p + \rho = \frac{-\sqrt{rr_o}[\beta^2 r_o + r(1 + \beta^2)]}{16\pi r^4}$$

Donde se verifica que satisface el requisito para mantener abierto el agujero de gusano.

Tercer caso: $b(r) = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$

Consideremos otra expresión para la función de forma $b(r)$ presentada en [12]:

$$b(r) = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \tag{16}$$

ISSN: 2244-7423

donde n es una constante, tal que se cumple que $b(r_o) = r_o$, $b^{'}(r_o) = n$ y para que se cumpla que $b^{'}(r_o) < 1$, entonces $n < 1$ y mayor que cero. De esa manera, repitiendo el procedimiento anterior para deducir la expresión del corrimiento hacia el rojo, es decir, sustituyendo la expresión (16) y su derivada en la ecuación (11), encontramos que

$$\Phi^{'} = \frac{r_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 [\beta^2 n r_o + (n(\alpha^2 - \beta^2) - 1)r]}{2r^2 \left[r_o \left(\frac{r}{r_o}\right)^n - r\right]}$$

Integrar está última ecuación es muy laboriosa, y por eso se va a suponer que ω es un valor constante (independiente de r), y por ende, la integración de esta última ecuación será igual a

$$\Phi(r) = C_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 + n\omega}{n - 1}\right) \ln\left(\frac{r r_o}{r_o r^n - r_o^n r}\right) \tag{17}$$

en donde se puede considerar $C_2 = 0$. Bajo esta última suposición, al calcular la expresión del cálculo de la energía débil dada por

$$p + \rho = \frac{n \left(\frac{r}{r_o}\right)^n r_o (1 + w)}{8\pi r^3}$$

nuevamente esta última expresión es negativa a raíz que w debe ser menor o igual a -1, requisito impuesto al suponer una energía fantasma.

4 Determinación de ω para validar una función de corrimiento al rojo

A diferencia del paso anterior, se realiza el proceso inverso, es decir, se parte de una definición de la función del corrimiento así como de la función de forma deducidas en el apartado 3. En este caso, consideraremos una función de forma dada por la expresión (16), y se va a definir una nueva función Φ semejante a las anteriores, tal que se cumpla $\omega(r_o) = \frac{-1}{n}$, la cual será

$$\Phi(r) \equiv \frac{r_0}{r} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{18}$$

De esa manera, al despejar la expresión de ω en (11), y sustituyendo en (16), nos conduce a

$$\omega = \frac{2r(r-b)\Phi^{'} - b}{rb^{'}} = \frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \left[2r_0 \left(\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - 1\right) - r\right] - 2r\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + 2r}{nr\left(\frac{r}{r_0}\right)^n} \tag{19}$$

Cuando $r = r_o$, el valor de $\omega(r_o) = \dfrac{-1}{n}$, y se cumple que $\omega \leftarrow -1$ (requisito presentado en la referencia [11]).

Al determinar la expresión $p + \rho$, entonces,

$$p + \rho = \frac{2\left[\ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right) - 1\right]\left(\dfrac{r}{r_o}\right)^n r_0^2 + \left\{(n-1)r\left(\dfrac{r}{r_o}\right)^n - 2\ln\left(\dfrac{r}{r_o}\right) + 2r\right\} r_o}{8\pi r^4}$$

se verificará sí estas expresión violan la condición de energía débil cuando se impone la condición $r = r_o$ en la expresión anterior, se obtiene

$$p + \rho = \frac{n-1}{8\pi r_o^2}$$

y como se indico en la sección anterior, n debe ser menor que 1, por lo tanto, la función propuesta en la ecuación (18) igualmente viola la condición de energía débil.

Una vez obtenidas esas funciones (la de forma y la de corrimiento), es posible determinar las expresiones de los términos de Christoffel, tensor de Ricci y tensor de curvatura, entre otros, lo cual se abordará en un próximo trabajo, así como considerar el tensor de Einstein-Maxwell para comparar dichos resultados. A modo de ejemplo, en el apéndice A se indican las expresiones diferentes de cero de los términos de Christoffel si la función de corrimiento hacia el rojo y la función de forma están dadas por (15) y (13), respectivamente.

5 Conclusiones

Se han determinado las expresiones del corrimiento hacia el rojo gravitacional de un agujero de gusano con la condición de que sea del tipo atravesable para permitir el viaje intergaláctico suponiendo tres funciones de forma diferente. Asimismo, se determina el valor de ω a partir de una nueva función de corrimiento al rojo donde se verifica que $\omega \leftarrow -1$ e igualmente viola la condición de energía débil, si dicho agujero está estabilizado con energía fantasma.

Apéndice A

Los valores de los coeficientes de Christoffel se obtuvieron tras evaluar la expresión (2) con la función derivada del corrimiento hacia el rojo descrita en (15), y la función de forma definida en (13) con excepción del término $\Gamma^r_{t,r}$ cuya expresión era demasiado extensa en comparación con el resto de los términos descritos en el trabajo:

$$\Gamma^r_{r,r} = \frac{r_0(\gamma^2(2r_0 - r) - r)}{2r_0 r\gamma^2(r_0 - r) - 2r^2(r - r_0)}$$

$$\Gamma^{\theta}_{r,\theta} = \Gamma^{\Phi}_{r,\Phi} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta,\theta} = \frac{\gamma^2 r_0(r - r_0) - r(r - r_0)}{r}$$

$$\Gamma^{\Phi}_{\theta,\Phi} = \cot(\theta)$$

$$\Gamma^{r}_{\Phi,\Phi} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta[\gamma^2 r_0(r - r_0) + r(r_0 - r)]}{r}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\Phi,\Phi} = -\cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

Bibliografía

[1] Morris, M. S. y Thorne, K. S. (1988). Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys, 56*:395–412.

[2] Isea, R. (2016). La física de los viajes en el tiempo a través de un agujero de gusano. *Revista de la Escuela de Física, IV*:9–19.

[3] Riess, A. G. et al. (1988). Observational Evidence from Super-novae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astronomical Journal, 116*:1009–1038.

[4] Perlmutter, S. J. et al. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys J., 517*:565–586.

[5] Isea, R. (2015). Agujeros de gusano en un espacio no-conmutativo del tipo Morris-Thorne considerando una teoría de gravedad modificada f(R). *Revista CLIC Conocimiento Libre y Licenciamiento, 14*:2–8.

[6] Caldwell, R. R., Dave, R. y Steinhardt, P. J. (1998). Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state. *Phys Rev Lett, 80*:1582–1585.

[7] Sami, M. (2009). Dark energy and possible alternatives. Preprint en arXiv: 0901.0756.

[8] Caldwell, R. R. (2002). A phantom menace? *Phys Rev Lett. B, 545*:23–29.

[9] Komatsu, E. et al. (2011). Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Cosmological interpretation. *Astrophys J. 686, suppl*:749–778.

[10] Gonzalez-Diaz, P. F. (2004). Achronal Cosmic Future. *Phys Rev Lett., 93*:071301-1–071301-4.

[11] Lobo, FSN. (2005). Phantom energy traversable wormholes. *Phys. Rev. D, 71*:084011.

[12] Garattini, R. y Lobo, F. S. (2007). Self sustained phantom wormholes in semi-classical gravity. Preprint en arXiv: 0701020v2.

[13] Lemos, J.P., Lobo, F.S. y De Oliveira, S. Q. (2003). Morris-Thorne wormholes with a cosmological constant. *Phys Rev D., 68*:064004.