Lagrangiano de un sistema de n-Péndulos planos

Raúl Isea
Fundación Instituto de Estudios Avanzados
Hoyo de la Puerta, Baruta. Venezuela.
raul.isea@gmail.com

Fecha de recepción: 08/12/2017
Fecha de aceptación: 05/05/2018
Pág: 2– 6

Resumen

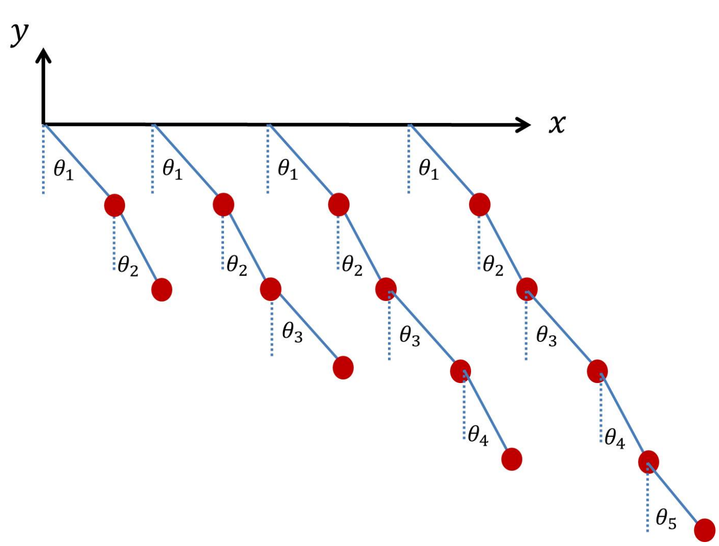
Se deriva una expresión general del Lagrangiano para un sistema formado por múltiples péndulos concatenados uno después del otro en un espacio de dos dimensiones.

Palabras Clave: Lagrangiano, péndulos, dimensiones.

Introducción

La presente reseña se va a derivar una expresión analítica del Lagrangiano para un sistema formado por múltiples péndulos concatenados uno después del otro en un espacio de dos dimensiones, tras una generalización de los resultados obtenidos con dos, tres, cuatro y cinco masas puntuales (ver figura 1).

Figura 1: Péndulo de 2, 3, 4 y 5 masas puntuales en un plano de dos dimensiones.



ISSN: 2244-7423

La mecánica Lagrangiana

Recordemos que la mecánica Lagrangiana es una reformulación de la mecánica newtoniana desarrollada por el matemático, físico y astrónomo ítalo-francés Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), quien determino el Lagrangiano (L) del sistema es igual a la energía cinética (T) menos la energía potencial (U), es decir, L = T - U.

En tal sentido, comenzaremos deduciendo la expresión del Lagrangiano para un péndulo doble plano, y posteriormente se va incrementando el número de masas hasta completar cinco de acuerdo a la figura 1.

Péndulo doble plano

Como todo sistema físico, es necesario definir el sistema de coordenadas del sistema dado por:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 \\ x_2 &= x_1 + l_1 \sin\theta_2 \\ y_2 &= y_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{1}$$

La expresión de energía cinética T es igual a:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\frac{dx_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_1(\frac{dy_1}{dt})^2 + \frac{1}{2}m_2(\frac{dy_2}{dt})^2 \tag{2}$$

de manera que al sustituir (1) en (2), se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)\right] \tag{3}$$

Solo nos falta la expresión de la energía potencia (U) que viene dada por U= mgy_1+mgy_2, es decir:

$$U = -g(m_1 + m_2)l_1\cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 \tag{4}$$

Por lo que el Lagrangiano para un péndulo doble es simplemente la resta de las expresiones (3) menos (4):

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + (m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2 g l_2\cos\theta_2 \tag{5}$$

Esta expresión es la misma que la derivada en múltiples trabajos y libros académicos [ver por ejemplo 1]. La importancia de esta última expresión (5) es que nos permite determinar las ecuaciones de movimiento θ_1 y θ_2. Para lograr ello, es necesario evaluar las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \tag{6}$$

donde el subíndice i va de 1 a 2, es decir, dependerá del número de grados de libertad, pero dichos cálculos se realizaran en un futuro inmediato. El próximo paso es obtener la ecuación para un péndulo de tres masas.

Péndulo triple

El procedimiento es idéntico al caso anterior, de modo que partimos del siguiente sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 \\ x_2 &= x_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 &= y_1 - l_2 \cos\theta_2 \\ x_3 &= x_2 + l_3 \sin\theta_3 \\ y_3 &= y_2 - l_3 \cos\theta_3 \end{aligned} \tag{7}$$

Las ecuaciones tanto de la energía cinética como la energía potencial son respectivamente:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 l_3^2\dot{\theta}_3^2 \\ +l_1l_2(m_2+m_3)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + l_1l_3m_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_3-\theta_1) + l_2l_3m_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\cos(\theta_3-\theta_2) \end{aligned} \tag{8}$$

$$U = -(m_1+m_2+m_3)gl_1\cos\theta_1 - (m_2+m_3)gl_2\cos\theta_2 - m_3gl_2\cos\theta_2 \tag{9}$$

De manera que el Lagrangiano para un péndulo triple es igual a:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 l_3^2\dot{\theta}_3^2 \\ +gl_1(m_1+m_2+m_3)\cos\theta_1 + gl_2(m_2+m_3)\cos\theta_2 + gl_3m_3\cos\theta_3 \\ +l_1l_2(m_2+m_3)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + l_1l_3m_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_3-\theta_1) + l_2l_3m_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\cos(\theta_3-\theta_2) \end{aligned} \tag{10}$$

Péndulo de cuatro masas

Repitiendo este mismo procedimiento, y con un poco más de algebra, se deriva la expresión del Lagrangiano para un péndulo compuesto por cuatro masas:

ISSN: 2244-7423

$$
\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3+m_4)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3+m_4)l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_3+m_4)l_3^2\dot{\theta}_3^2 \\
+\frac{1}{2}m_4 l_4^2\dot{\theta}_4^2 + +gl_1(m_1+m_2+m_3+m_4)\cos\theta_1 + gl_2(m_2+m_3+m_4)\cos\theta_2 \\
+gl_3(m_3+m_4)\cos\theta_3 + gl_4 m_4\cos\theta_4 + l_1l_2(m_2+m_3+m_4)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) \\
+l_1l_3(m_3+m_4)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_3-\theta_1) + l_1l_4m_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\cos(\theta_4-\theta_2) + l_3l_4m_4\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4\cos(\theta_4-\theta_3)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Péndulo de cinco masas

Mientras que la expresión para un péndulo de cinco masas es igual a:

$$
\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2+m_3+m_4+m_5)l_2^2\dot{\theta}_2^2 \\
\frac{1}{2}(m_3+m_4+m_5)l_3^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}(m_4+m_5)l_4^2\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}m_5 l_5^2\dot{\theta}_5^2 \\
+gl_1(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)\cos\theta_1 + gl_2(m_2+m_3+m_4+m_5)\cos\theta_2 \\
gl_3(m_3+m_4+m_5)\cos\theta_3 + gl_4(m_4+m_5)\cos\theta_4 + gl_5m_5\cos\theta_5 \\
l_1l_2(m_2+m_3+m_4+m_5)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + l_1l_3(m_3+m_4+m_5)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_3-\theta_1) \\
l_1l_4(m_4+m_5)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4\cos(\theta_4-\theta_1) + l_1l_5m_5\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5\cos(\theta_5-\theta_1) \\
l_2l_3(m_3+m_4+m_5)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\cos(\theta_3-\theta_2) + l_2l_4(m_4+m_5)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\cos(\theta_4-\theta_2) \\
l_2l_5m_5)\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5\cos(\theta_5-\theta_2) + l_3l_4(m_4+m_5)\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4\cos(\theta_4-\theta_3) + l_3l_5m_5\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5\cos(\theta_5-\theta_3) \\
+l_4l_5m_5)\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5\cos(\theta_5-\theta_4)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

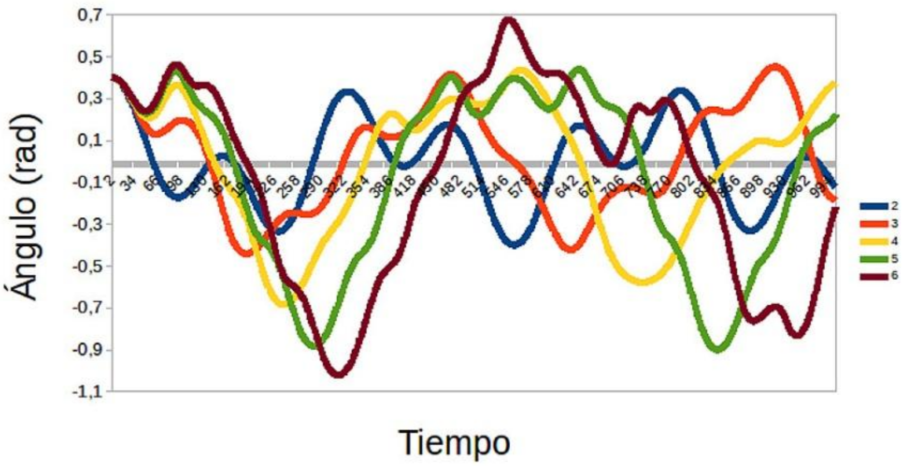
Tras observar las distintas expresiones de los Lagrangianos obtenidos para dos (5), tres (9), cuatro (10) y cinco (11) masas, es posible derivar una expresión general para un sistema formado por n-Péndulos planos en dos dimensiones:

$$
L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l_1^2\dot{\theta}_i^2(\sum_{j=1}^{n} m_j) + g\sum_{j=1}^{n} l_1^2\cos\theta_i^2(\sum_{j=1}^{n} m_j) + \sum_{i=1}^{n} l_1\dot{\theta}_i^2 \sum_{j=i+1}^{n} l_j\dot{\theta}_j^2(\sum_{k=j}^{n} m_k)\cos(\theta_j-\theta_i) \tag{13}
$$

Conclusiones

Finalmente, se determina el desplazamiento angular de la primera masa del sistema (θ_1) que es común en todos los péndulos descritos en la presente reseña. El mismo fue calculado gracias a un programa escrito en el lenguaje de programación de alto nivel Python donde se ha supuesto que todos los péndulos poseen la misma longitud e igual a dos (l=2), así como la misma masa puntual (m=0.3). Dicho resultado se muestra en la figura 2, donde se aprecia claramente como aumenta el periodo de oscilación a medida que se incrementa el número de masas. Este resultado debe ser analizado con más detalle en próximas publicaciones.

Figura 2: Determinación numérica del desplazamiento angular de un péndulo formado por dos (color azul), tres (naranja), cuatro (amarillo), cinco (verde) y seis (vino tinto) masas, bajo la misma condición inicial (0.4 radianes).



Bibliografía

V. I. Arnold, "Problem in Mathematical Methods of Classical Mechanics", 2nd ed. New York: Springer-Verlag, p. 109, 1989